Приложение 2 к РПД Методы оптимизации
01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль)
Системное программирование
и компьютерные технологии
Форма обучения – очная
Год набора – 2022

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	01.03.02 Прикладная математика и информатика
3.	Направленность (профиль)	Системное программирование и компьютерные технологии
4.	Дисциплина (модуль)	К.М.01.10 Методы оптимизации
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2022

1. Перечень компетенций

- ОПК-3: Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

2. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этапы формирования компетенций (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	**Уметь:**	**Владеть:**	
Основные понятия и методы теории информации и кодирования. Сигналы, данные, информация. Общая характеристика процессов сбора, передачи, обработки и накопления информации	ОПК-3	– знать основные понятия, связанные с экстремальными задачами; – методы решения задач безусловной оптимизации; – методы решения гладких задач с ограничениями;	– уметь применять классические методы математики при решении фундаментальных и прикладных задач; самостоятельно разбираться в мощном математическом аппарате, содержащемся в специальной литературе; доводить решение оптимизационной задачи до практически приемлемого результата (уметь проводить доказательства и делать выводы)	– мощным и универсальным математическим аппаратом, позволяющим решать экстремальные задачи, возникающие в социально-экономических, экологических и производственных системах; применять навыки формализации задач вариационного исчисления и оптимального управления и методов их решения в практической деятельности	Контрольная работа «Гладкие экстремальные задачи», коллоквиум «Гладкие и выпуклые экстремальные задачи»
Технические средства реализации информационных процессов	ОПК-3	– постановки и правила решения задач классического вариационного исчисления	– уметь применять классические методы математики при решении фундаментальных и прикладных задач; самостоятельно разбираться в мощном математическом аппарате, содержащемся в специальной литературе; доводить решение оптимизационной задачи до практически приемлемого результата (уметь проводить доказательства и делать выводы)	– мощным и универсальным математическим аппаратом, позволяющим решать экстремальные задачи, возникающие в социально-экономических, экологических и производственных системах; применять навыки формализации задач вариационного исчисления и оптимального управления и методов их решения в практической деятельности	Контрольная работа «Классическое вариационное исчисление», экзамен

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы

«неудовлетворительно» – 60 баллов и менее;
«удовлетворительно» – 61-80 баллов
«хорошо» – 81-90 баллов
«отлично» – 91-100 баллов

1. Критерии и шкалы оценивания

Контрольная работа «Классические методы оптимизации»

Номер задания	1	2	3	4	5
Количество баллов за решенное задание	3	3	3	3	3
ИТОГО:	15				

Контрольная работа «Численные методы многомерной оптимизации»

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Количество баллов за решенное задание	2	2	2	3	3	3
Итого:	15					

Коллоквиум «Экстремальные задачи»

Номер вопроса	1	2
Количество баллов за ответ на вопрос	5	5
Итого:	10	

Участие в учебной дискуссии (всего не более 20 баллов):

Характеристика ответа студента	Баллы
– студент глубоко и всесторонне усвоил теоретический материал, уверенно, логично, последовательно и грамотно его излагает – опираясь на знания основной и дополнительной литературы, тесно привязывает усвоенные знания с практической деятельностью – делает выводы и обобщения – свободно владеет понятиями – способен описать круг функциональных задач, решаемых на базе имеющихся знаний по разделу	2
Ответ студента в целом верен и достаточно полный, однако содержит неточности и недочеты, не позволяющие выставить 2 балла	1
Ответ отсутствует или неудовлетворителен	0

Подготовка доклада:

Критерии оценивания текста доклада	0-3 балла
Выполнены все требования к содержательной и оформительской части доклада: – текст доклада соответствует теме, тема раскрыта достаточно полно, сделаны необходимые выводы и обобщения, теоретические сведения проиллюстрированы примерами – доклад оформлен в соответствии с требованиями к оформлению – при подготовке доклада использовано не менее трех источников	3
При оформлении текста доклада допущены недочеты, не влияющие на его содержательную часть	2
Оценка выставляется, если: – тема доклада раскрыта слабо или неполно – в тексте отсутствуют выводы, обобщения, приведены частные примеры – оформление текста не соответствует требованиям	1
Оценка выставляется, если: – текст доклада не представлен – тема доклада не раскрыта, либо из текста можно сделать вывод о том, что студент не разобрался в материале – текст в значительной мере заимствован из одного или нескольких источников	0

Критерии оценивания текста доклада	0-3 балла
– оформление текста не соответствует требованиям	
Критерии оценивания выступления	0-2 балла
Выполнены все требования к публичной защите доклада: – во время выступления использованы наглядные материалы (презентация, иллюстрации, схемы) – ответы на уточняющие вопросы демонстрируют понимание студентом темы, аргументированы и подкреплены как теоретическими сведениями, так и практическими примерами	2
Ответы на вопросы неполны либо отсутствуют	1
Выступления нет либо оно проведено неудовлетворительно	0

Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

1) Типовое контрольное задание

1. $f(x) = ax^2 + bx + c \to extr \quad (a \neq 0)$

Решение.

1. Задача дана уже в формализованном виде.

2. Необходимое условие экстремума – теорема Ферма: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0$.

3. $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ – стационарная точка.

4. а) Если $a > 0$, то $f(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$. По следствию из теоремы Вейерштрасса решение задачи существует. В силу единственности стационарной точки имеем

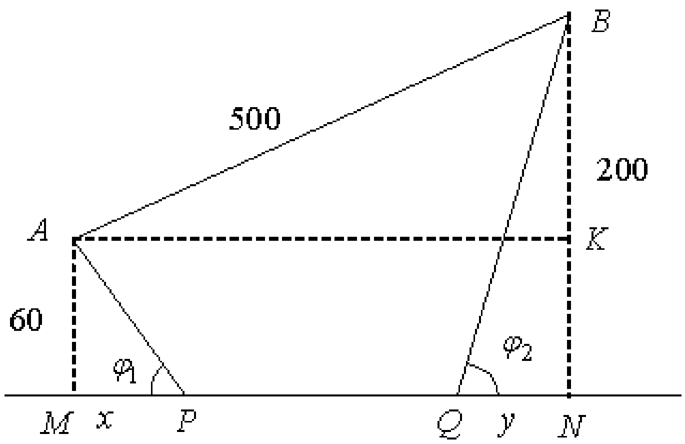
$$x_0 = -\frac{b}{2a} \in \text{abs min},\ S_{\min} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},\ S_{\max} = +\infty\ .$$

б) Если $a < 0$, то аналогично получим

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \in \text{abs max},\ S_{\max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},\ S_{\min} = -\infty\ .$$

2. Два города A и B лежат по одну сторону от прямолинейной дороги на расстоянии 60 км и 200 км от нее. Перевозка груза по дороге обходится вдвое дешевле, чем по любому пути вне дороги. Как следует двигаться, чтобы затраты на перевозку груза из A в B были минимальными, если известно, что расстояние между городами равно 500 км.

Решение. 1. Формализуем задачу.



Имеем $AB = 500,\ AM = 60,\ BN = 200 \Rightarrow BK = 200 - 60 = 140$; $AK = MN =$
$= \sqrt{500^2 - 140^2} = \sqrt{360 \cdot 640} = 480$.

Пусть $MP = x,\ QN = y$. Если движение производится по пути $APQB$, то точки P и Q должны быть выбраны так, чтобы минимизировать функцию

$$R(x,\ y) = 2\sqrt{3600 + x^2} + (480 - x - y) + 2\sqrt{40000 + y^2},$$

где $x \geq 0,\ \ y \geq 0$ по смыслу задачи.

Следовательно, формализация задачи имеет вид:

$$R(x,\ y) = 2\sqrt{3600 + x^2} + (480 - x - y) + 2\sqrt{40000 + y^2} \to \inf. \qquad (3)$$

Полученную задачу можно разделить на две. Представим функцию $R(x,\ y)$ в виде $R(x,\ y) = R_1(x) + R_2(y) + 480$, где $R_1(x) = 2\sqrt{3600 + x^2} - x$, $R_2(x) = 2\sqrt{40000 + y^2} - y$. Чтобы решить задачу (3) нужно решить две задачи:

$$R_1(x) = 2\sqrt{3600 + x^2} - x \to \inf \quad \text{и} \quad R_2(x) = 2\sqrt{40000 + y^2} - y \to \inf.$$

2. Необходимые условия экстремума для полученных задач имеют вид: $R_1'(x) = 0$ и $R_2'(y) = 0$.

3. Найдем стационарные точки.

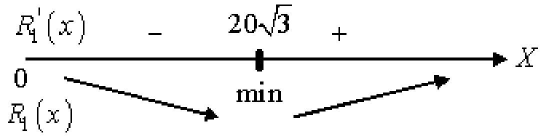
а) $R_1'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x}{\sqrt{3600 + x^2}} - 1 = 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{3600 + x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 = 3600 + x^2 \Rightarrow x^2 = 1200 \Rightarrow x_0 = 20\sqrt{3}$.

б) $R_2'(y) = 0 \Rightarrow \dfrac{2y}{\sqrt{40000 + y^2}} - 1 = 0 \Rightarrow 2y = \sqrt{40000 + y^2} \Rightarrow$

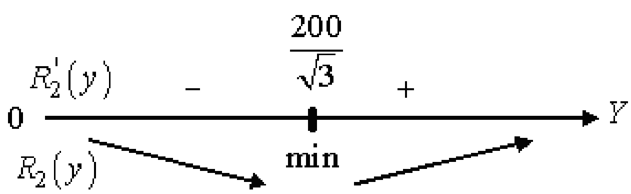
$\Rightarrow 3y^2 = 40000 \Rightarrow y^2 = \dfrac{40000}{3} \Rightarrow y_0 = \dfrac{200}{\sqrt{3}} \approx 115{,}5$.

4. а) Так как $R_1'(20) = \dfrac{40}{\sqrt{4000}} - 1 = \dfrac{2}{\sqrt{10}} - 1 < 0$, то



точка $x_0 = 20\sqrt{3} \in \text{abs}\min$. Найдем $R_1\left(20\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{4800} - 20\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$. Кроме того, $\text{tg}\ \varphi_1 = \dfrac{AM}{MP} = \dfrac{60}{20\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_1 = 60^\circ$.

б) Так как $R_2'(100) = \dfrac{200}{100\sqrt{5}} - 1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}} - 1 < 0$, то



точка $y_0 = \frac{200}{\sqrt{3}} \in \text{abs}\min$. Найдем $R_2\left(\frac{200}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{40000 + \frac{40000}{3}} - \frac{200}{\sqrt{3}} =$
$= 400\sqrt{1+\frac{1}{3}} - \frac{200}{\sqrt{3}} = \frac{800}{\sqrt{3}} - \frac{200}{\sqrt{3}} = \frac{600}{\sqrt{3}} = 200\sqrt{3}$.

Кроме того, $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{BN}{QN} = \frac{200}{\frac{200}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_2 = 60^\circ$.

$S_{\min} = R(x_0; y_0) = R\left(20\sqrt{3}; \frac{200}{\sqrt{3}}\right) = 60\sqrt{3} + 200\sqrt{3} + 480 = 260\sqrt{3} + 480 < 1000$, так как $26\sqrt{3} + 48 < 100 \Leftrightarrow 26\sqrt{3} < 52 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2$ – очевидно. Это показывает, что расходы на перевозку по прямому пути AB наименьшими не являются.

Следовательно, двигаться надо по пути $APQB$, где $\angle APM = = \angle BQN = 60^\circ$.

3. $f(x_1,\ x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2 \to extr$

<u>Решение.</u> 1. Очевидно, что $S_{\max} = +\infty$, а из следствия теоремы Вейерштрасса получим, что минимум в задаче достигается.

2. Необходимое условие экстремума (теорема Ферма) имеет вид: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1^3 = x_1 + x_2 \\ 2x_2^3 = x_1 + x_2 \end{cases}$.

3. Найдем стационарные точки. Для этого решим систему п. 2:
$\begin{cases} 2x_1^3 = x_1 + x_2 \\ 2x_2^3 = x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$. Подставим полученное равенство в 1-е уравнение системы: $2x_1^3 = 2x_1 \Leftrightarrow x_1^3 = x_1 \Leftrightarrow x_1^3 - x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1\left(x_1^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_1 = \pm 1.$

Так как $x_1 = x_2$, то получаем следующие стационарные точки:

$$(0;\ 0),\ (1;\ 1),\ (-1,\ -1).$$

4. Имеем $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 12x_1^2 - 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 12x_2^2 - 2$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2$. Значит, матрица вторых производных имеет вид: $A(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2 - 2 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим точку $(0;\ 0)$. Имеем $A(0,\ 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Матрица $-A(0,\ 0)$является неотрицательно определенной (так как ее миноры $\det A_1 = 2,\ \det A_2 = 0$). Следовательно, точка $(0;\ 0)$ удовлетворяет необходимому условию второго порядка на максимум. Однако, так как $f(0,\ 0) = 0$, а при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ имеем $f(0,\ \varepsilon) = \varepsilon^4 - \varepsilon^2 =$
$= \varepsilon^2\left(\varepsilon^2 - 1\right) < 0$, $f(\varepsilon,\ -\varepsilon) = 2\varepsilon^4 > 0$, то $(0;\ 0) \notin \text{loc extr}$.

Теперь рассмотрим точки $(1;\ 1),\ (-1,\ -1)$. Имеем $A(1,\ 1) = \ = A(-1,\ -1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$. Эта матрица является положительно определенной (так как ее миноры $\det A_1 = 10,\ \det A_2 = 96$), следовательно, по достаточному условию точки $(1;\ 1),\ (-1,\ -1)$ являются точками локального минимума, а так как минимум существует, то они доставляют и глобальный минимум.

Ответ. $(0;\ 0) \notin \text{loc extr}$, $\{(1;\ 1),\ (-1,\ -1)\} \in \text{abs min}$.

4. Методом оптимального пассивного поиска на начальном интервале $\Delta_0 = [-1, 1]$ найти минимум функции $f(x) = x^2$. Количество пробных точек N = 9. Ход решения оформить в виде таблицы.

1. Вычислим координаты пробных точек и заполним ими верхнюю строку таблицы.
2. Вычислим значения целевой функции *f(x)* в пробных точках. Точка начала и конца начального интервала неопределенности пробными точками не являются.
3. Выполняя процедуру сканирования, найдем значение $\bar{x}$, при котором *f(x)* минимально.
4. Найдено решение $\bar{x} = 0.0$ и интервал неопределенности [-0.2, 0.2].

x	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f(x)	-	0.64	0.36	0.16	0.4	0.0	0.4	0.16	0.36	0.64	-

Ответ: $\bar{x} = 0.0$; интервал неопределенности [-0.2, 0.2].

5. Оцените длину конечного интервала неопределенности для метода дихотомии в зависимости от количества выполненных итераций. При построении оценки учесть константу различимости.

Рассмотрим последовательность строящихся в ходе работы алгоритма длин интервалов неопределенности (учтем константу различимости $\delta = 2\delta^* > 0$; начальный интервал неопределенности $\Delta_0 = [a; b]$, $a > b$):

$|\Delta_0| = |\ b - a\ |$

$|\Delta_1| = |\Delta_0|/2 + \delta^*$

$|\Delta_2| = |\Delta_1|/2 = |\Delta_0|/4 + \delta^*/2 + \delta^*$

$|\Delta_3| = |\Delta_3|/2 = |\Delta_0|/8 + \delta^*/4 + \delta^*/2 + \delta^*$

…

$|\Delta_k| = |\Delta_{k-1}|/2 = |\Delta_0|/2^k + \delta^*/2^{k-1} + \delta^*/2^{k-2} + \ldots + \delta^* =$

$= |\Delta_0|/2^k + \delta^*(1/2^{k-1} + 1/2^{k-2} + \ldots + 1)$

Здесь $1/2^{k-1} + 1/2^{k-2} + \ldots + 1$ представляет собой геометрическую прогрессию из k членов с начальным членом $b_1 = 1$ и коэффициентом прогрессии $q = 1/2$, сумма которой, очевидно, равна

$b_1(1 - q^k) / (1 - q) = 1(1 - 2^{-k}) / (1 - 1/2) = 2(1 - 2^{-k}) = 2 - 2^{-k+1}$.

Отсюда

$|\Delta_k| = |\Delta_0|/2^k + 2\delta^* - 2^{-k+1}\delta^*$.

Ответ: $|\Delta_k| = |\Delta_0|/2^k + 2\delta^* - 2^{-k+1}\delta^*$.

Требования к докладу

Требования к оформлению доклада:

1. Объем доклада – 10 страниц (без титульного листа и списка источников).
2. Титульный лист должен быть оформлен по образцу (имеется файл с образцом).
3. Основной текст работы оформлен в соответствии с требованиями, указанными ниже.
4. В случае использования в тексте таблиц и/или рисунков на каждый объект должна быть ссылка в тексте работы. Например, «... основные виды программных средств представлены ниже (см. Таблица 1)» или «... схему передачи информации можно увидеть на рис. 1».
5. Количество источников должно быть не менее трех, на все должны быть ссылки внутри текста.

6. Список используемых источников должен быть оформлен в соответствии с требованиями, указанными ниже.

<u>Для оформления основного текста работы:</u>

1. Шрифт – TimesNewRoman, размер – 14 пт.
2. Абзац: междустрочный интервал – 1,5; выравнивание – «по ширине»; абзацный отступ – 1,25 см.
3. Оформление рисунков (при необходимости): выравнивание рисунка – «по центру», подпись рисунка – «Рис. №. Название рисунка»; шрифт для подписи рисунка – TimesNewRoman, размер – 12 пт.
4. Оформление таблиц (при необходимости): выравнивание таблицы – «по центру»; шрифт внутри таблицы – TimesNewRoman, размер – 11-12 пт.; выравнивание текста внутри таблицы – на усмотрение пользователя; подпись таблицы располагается над таблицей и состоит из двух частей: «Таблица №» – выравнивание по правому краю и «Название таблицы» – выравнивание по правому краю или по центру.

<u>Для оформления источников (в соответствии с ГОСТ 2008):</u>

1. Источники должны быть расположены в алфавитном порядке и пронумерованы.
2. В тексте доклада ссылка на источник выполняется в виде: [№], где № – номер источника в общем списке.
3. Если в тексте используется дословная цитата, то она должна быть взята в кавычки, а в ссылке на источник указана страница: [5, с.15].

Вопросы к экзамену:

1. Основные понятия и определения, связанные с экстремальными задачами. Целевая функция. Пробная точка. Точность решения. Интервал неопределенности (текущий, конечный). Локальный и глобальный минимум. Область допустимых значения. Допустимое решение. Оптимальное решение. Экстремум. Монотонная функция. Унимодальная функция. Методы точечного оценивания. Методы исключения. Методы прямого поиска. Методы первого, второго и т. д. порядка.
2. Принцип Лагранжа исследования задач с ограничениями типа равенств.
3. Принцип Лагранжа исследования задач с ограничениями типа неравенств.
4. Принцип Лагранжа исследования задач с ограничениями типа равенств и неравенств
5. Гладкие задачи без ограничений. Необходимые и достаточные условия экстремума высших порядков
6. Гладкая конечномерная задача с ограничениями типа равенств (постановка задачи, правило решения, правило множителей Лагранжа, необходимые и достаточные условия экстремума высших порядков).
7. Формулировка задачи оптимизации в общем виде (для одномерного и многомерного случая). Сводимость задачи поиска максимума к задаче поиска минимума. Аналитическое нахождение минимума функции.
8. Критерии оптимальности. Критерии останова. Понятие сходимости. Сходимость по аргументу, по значению функции, по градиенту (градиентная сходимость).
9. Понятие скорости сходимости. Сублинейная, линейная, сверхлинейная сходимость.
10. Методы пассивного поиска (методы сканирования). Метод оптимального пассивного поиска (случай для нечетного и четного числа узлов). Стратегия размещения пробных точек. Модификации метода пассивного поиска. Оценка длины конечного интервала неопределенности от количества итераций, от количества вычислений целевой функции. Оценка достигнутой точности решения. Оценка скорости сходимости (вывод). Преимущества и недостатки.
11. Метод половинного деления. Стратегия размещения пробных точек. Оценка длины конечного интервала неопределенности от количества итераций, от количества вычислений целевой функции. Оценка достигнутой точности решения. Оценка скорости сходимости (вывод). Преимущества и недостатки.
12. Метод дихотомии. Стратегия размещения пробных точек. Константа различимости. Оценка длины конечного интервала неопределенности от количества итераций, от количества

вычислений целевой функции. Оценка достигнутой точности решения. Оценка скорости сходимости (вывод). Преимущества и недостатки. Сравнение с методом половинного деления.
13. Метод тернарного поиска. Стратегия размещения пробных точек. Оценка длины конечного интервала неопределенности от количества итераций, от количества вычислений целевой функции. Оценка достигнутой точности решения. Оценка скорости сходимости (вывод). Преимущества и недостатки. Сравнение с методом дихотомии.
14. Метод золотого сечения. Стратегия размещения пробных точек. Оценка длины конечного интервала неопределенности от количества итераций, от количества вычислений целевой функции. Оценка достигнутой точности решения. Оценка скорости сходимости (вывод). Преимущества и недостатки. Анализ получения алгоритма метода золотого сечения из алгоритма метода тернарного поиска.
15. Метод Фибоначчи. Стратегия размещения пробных точек. Оценка длины конечного интервала неопределенности от количества итераций, от количества вычислений целевой функции. Оценка достигнутой точности решения. Оценка скорости сходимости (вывод). Преимущества и недостатки. Сопоставление с методом золотого сечения. Анализ получения алгоритма метода Фибоначчи из алгоритма метода золотого сечения.
16. Общая структура методов половинного деления, дихотомии, тернарного поиска, золотого сечения, Фибоначчи.
17. Метод параболической аппроксимации (метод Пауэла). Стратегия размещения пробных точек. Оценка скорости сходимости (без вывода). Преимущества и недостатки.
18. Определение начального интервала неопределенности. Алгоритм Свенна.
19. Метод покоординатного спуска. Особенности, преимущества и недостатки.
20. Метод градиентного спуска с постоянным шагом. Особенности, преимущества и недостатки.
21. Метод наискорейшего градиентного спуска. Особенности, преимущества и недостатки.
22. Метод случайных направлений.
23. Метод множителей Лагранжа
24. Метод штрафных функций
25. Метод барьерных функций
26. Постановка (формулировка) задачи линейного программирования
27. Симплекс-метод. Транспортная задача.